საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე, ტ. II, № 6, 1941
СООБЩЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР, Т. II, № 6, 1941
MITTEILUNGEN d. AKADEMIE d. WISS. d. GEORGISCHEN SSR, Bd. II, Nr. 6, 1941

МАТЕМАТИКА

ИЛЬЯ ВЕКУА

ОБ ОДНОМ НОВОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИИ

Интегральные представления аналитических функций играют весьма важную роль как в теории функций комплексной переменной, так и в ее приложениях. Достаточно для этого напомнить интегральную формулу Коши и интегралы типа Коши; последние особенно большое значение приобрели благодаря работам акад. Н. И. Мусхелишвили и его учеников, в которых при их помощи решены все основные задачи плоской теории упругости, а также многие краевые задачи, связанные с эллиптическими диференциальными уравнениями. Но встречаются и такие краевые задачи, связанные с аналитическими функциями, при решении которых пользование существующими интегральными представлениями аналитических функций, например, интегралами типа Коши, не является целесообразным, так как они не приводят к интегральным уравнениям Фредгольма. Мы ниже даем одно новое интегральное представление некоторого класса аналитических функций в конечной многосвязной области, которое является весьма удобным аппаратом для приведения общих линейных краевых задач к интегральным уравнениям Фредгольма.

1. Пусть T—конечная область на плоскости комплексной переменной z, ограниченная простыми замкнутыми контурами $L_0, L_1, \ldots, L_m$, из которых L_0 охватывает все остальные. Полную границу области T обозначим через L, $L=L_0+L_1+\cdots+L_m$, причем направление на L, оставляющее область T слева, будем считать положительным. Пусть T_j—область, ограниченная контуром L_j, $j=0, 1, \ldots, m$, при этом, очевидно, T_0—бесконечная область с границей L_0. Будем обозначать через T' совокупность областей $T_0, T_1, \ldots, T_m$, т. е. $T'=T_0+T_1+\cdots+T_m$. Относительно границы L примем следующее ограничение: контуры L_j имеют в каждой точке непрерывную кривизну.

Поместим начало координат внутри T и во всем дальнейшем будем употреблять R и J для обозначения вещественной и мнимой части комплексного выражения.

Теорема. *Если выполнены условия:* 1) *функция* $\varphi(z)$ *голоморфна в области* T *и непрерывна вместе со своими производными до* $n+1$-го *порядка в* $T+L$, *причем производная* $n+1$-го *порядка удовлетворяет условию* Hölder'a,

2) $J\{\varphi(0)\}=0$, *то существует единственная действительная непрерывная функция* $\mu(t)$ *точки* t *границы* L, *удовлетворяющая условию* Hölder'а, *такая, что*

$$\varphi(z)=\int_L \mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^n \lg\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+\int_L \mu(t)\,ds, \tag{1}$$

где ds*—элемент дуги* L, *под логарифмом понимается главная ветвь, т. е. с мнимой частью* $\geqq 0$ *и* $<2\pi$, z*—точка, лежащая внутри* T.

Докажем сперва единственность такого представления. Для этого достаточно показать, что если левая часть (1) $\equiv 0$, то тогда $\mu(t)$ также $\equiv 0$.

Пусть $\mu(t)$—действительная непрерывная функция точки t, $t \varepsilon L$, удовлетворяющая условию Hölder'а и такая, что

$$\int_L \mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^n \lg\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+\int_L \mu(t)\,ds\equiv 0 \tag{2}$$

для всех $z, z \varepsilon T$. Отсюда, разлагая левую часть (2) в ряд по степеням z вблизи начала координат и приравнивая коэфициенты нулю, а также приняв во внимание, что $ds=\bar{t}'(s)\,dt$, получим:

$$\int_L \mu(t)\,\bar{t}'(s)\,t^{-k}dt=0, \quad k=0, 1, 2, \ldots, \infty. \tag{3}$$

Следовательно, $\mu(t)\,\bar{t}'(s)$ представляет граничное значение функции, голоморфной в каждой из областей T_j, т. е.

$$\mu(t)\,\bar{t}'(s)=\psi_j(t), \quad t \varepsilon L_j, \ j=0, 1, \ldots, m, \tag{4}$$

где $\psi_j(t)$—граничное значение функции $\psi_j(z)$, голоморфной внутри T_j, причем функция $\psi_0(z)$, как это видно из (3) при $k=0$, обращается в нуль на бесконечности как $\frac{1}{z^2}$. Но из (4) получаем: $J\{\psi_j(t)\,dt\}=0$, $t \varepsilon L_j$ или $J\{d\int\psi_j(t)\,dt\}=dJ\{\int\psi_j(t)\,dt\}=0$, т. е. $J\{\int\psi_j(t)\,dt\}=\text{const}$, $j=0, 1, \ldots, m$.

Отсюда

$$\int \psi_j(z)\,dz=\text{const}, \quad z \varepsilon T_j, \ j=0, 1, \ldots, m.$$

Следовательно, $\psi_j(z)\equiv 0$ и, в силу (4), $\mu(t)\equiv 0$, что и требовалось доказать.

Переходим теперь к доказательству того, что любую голоморфную функцию $\varphi(z)$ в области T, удовлетворяющую условиям теоремы, можно представить в виде (1).

Пусть $\mu(t)$—действительная непрерывная функция, удовлетворяющая условию Hölder'а. Тогда левая часть (1) действительно представляет аналитическую функцию в области T, удовлетворяющую всем условиям теоремы. Диференцируя обе части (1) $n+1$ раз, получим:

$$\varphi^{(n+1)}(\zeta)=\varepsilon_n \int_L \mu(t) \frac{ds}{t^n(t-\zeta)}, \tag{5}$$

где $\varepsilon_n=(-)^{n+1}n!$ Переходя к пределу, когда точка ζ стремится изнутри области T к граничной точке τ, получим:

$$\varphi^{(n+1)}(\tau)=\varepsilon_n\pi i \frac{1}{\tau^n\tau'(\sigma)} \mu(\tau)+\varepsilon_n \int_L \mu(t) \frac{ds}{t^n(t-\tau)}, \tag{6}$$

где σ—дуга, соответствующая точке τ. Умножая обе части (6) на $\dfrac{\tau^n\tau'(\sigma)}{\pi i\,\varepsilon_n}$ и обозначая

$$\frac{\tau^n\tau'(\sigma)\,\varphi^{(n+1)}(\tau)}{\pi i\,\varepsilon_n}=p(\tau)+iq(\tau), \tag{7}$$

получим:

$$\mu(\tau)+\frac{1}{\pi i}\int_L \mu(t) \frac{\tau^n\tau'(\sigma)}{t^n(t-\tau)}\,ds=p(\tau)+iq(\tau),$$

где $p(\tau)$ и $q(\tau)$—действительные функции, удовлетворяющие, согласно предположению, условию Hölder'a.

Отсюда видно, что искомая функция $\mu(t)$ должна быть решением интегрального уравнения

$$\mu(\tau)+\int_L \mu(t)R\left[\frac{1}{\pi i}\,\frac{\tau^n\tau'(\sigma)}{t^n(t-\tau)}\right]ds=p(\tau), \tag{8}$$

ядро которого, при сделанных выше предположениях относительно L, как это легко проверить, будет регулярным.

Рассмотрим союзное однородное уравнение

$$\nu(\tau)+\int_L \nu(t)R\left[\frac{1}{\pi i}\,\frac{t^n t'(s)}{\tau^n(\tau-t)}\right]ds=0, \tag{9}$$

которое еще можно записать так:

$$R\left[\nu(\tau)-\frac{1}{\pi i}\int_L \nu(t)\frac{t^n dt}{\tau^n(t-\tau)}\right]=0. \tag{10}$$

Пусть $\nu(t)$—решение уравнения (9). Оно, очевидно, будет удовлетворять условию Hölder'a. Введем функцию

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{\zeta^n}\,\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\nu(t)\,t^n}{t-\zeta}\,dt,$$

которая, как нетрудно видеть, будет голоморфной в каждой области T_j, причем на бесконечности обращается в нуль.

Тогда, в силу (10), будем иметь:

$$R[\Phi_a(\tau)]=0,$$

где $\Phi_a(\tau)$ обозначает предельное значение $\Phi(z)$, когда точка z из T' подходит к граничной точке τ. В силу последнего условия имеем

$$\Phi(z)=ic_j, \quad z \in T_j, \quad j=0, 1, \ldots, m, \tag{11}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_m$—произвольные действительные постоянные, а $c_0=0$. Пусть $c(z)$—голоморфная функция в каждой области T_j, определенная следующим образом: $c(z)=c_j$, если $z \in T_j+L_j$, причем $c_0=0$. Тогда, в силу (11), напишем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \nu(t)\,\frac{t^n}{t-z}\,dt=ic(z)\,z^n, \quad z \in T'$$

или это равенство можем записать еще так:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{[\nu(t)-ic(t)]\,t^n}{t-z}\,dt=0, \quad z \in T'.$$

Отсюда вытекает, что $[\nu(t)-ic(t)]\,t^n$ представляет граничное значение функции, голоморфной в области T, т. е.

$$[\nu(t)-ic(t)]\,t^n=f(t),$$

где $f(t)$—граничное значение функции, голоморфной в области T. Отсюда имеем:

$$\nu(t)=ic(t)+\frac{f(t)}{t^n}, \quad t \in L. \tag{12}$$

Но ввиду того, что $\nu(t)$—действительная функция, получим:

$$J\left\{\frac{f(t)}{t^n}\right\}=-c(t). \tag{13}$$

Функцию $f(z)$ всегда можем представить так:

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}-z^nf_0(z), \tag{14}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$—комплексные постоянные, а $f_0(z)$—голоморфная функция в области T. Тогда (13) примет вид:

$$J\{f_0(t)\}=c(t)+J\left\{\frac{a_0}{t^n}+\frac{a_1}{t^{n-1}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{t}\right\}. \tag{15}$$

Таким образом, мы пришли к следующей задаче: *Найти функцию $f_0(z)$, голоморфную в области T, по контурным условиям* (15).

Как доказано акад. Н. И. Мусхелишвили [1], эта задача всегда имеет решение (при любых $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$), определенное с точностью до аддитивной действительной постоянной; при этом постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_m$ подбираются совершенно определенным образом.

Таким образом, найдя $f_0(z)$, выражение которой содержит $2n+1$ произвольных вещественных постоянных, в силу (14) и (12) получим выражение для $\nu(t)$, которое также будет содержать $2n+1$ произвольных действительных постоянных. Следовательно, однородное интегральное уравнение (9) имеет $2n+1$ линейно-независимых решений $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$, ..., $\nu_{2n+1}(t)$. Тогда, по известной теореме Фредгольма, однородное уравнение, соответствующее (8), будет иметь также $2n+1$ линейно-независимых решений $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, ..., $\mu_{2n+1}(t)$, которые очевидно, будут удовлетворять условию Hölder'a.

Докажем теперь, что неоднородное уравнение (8) всегда имеет решение. В самом деле, в силу (7) и (12), имеем

$$\int\limits_L \nu(t)\, p(t)\, ds = \int\limits_L \nu(t) R\left[\frac{t^n t'(s)\, \varphi^{(n+1)}(t)}{\pi i\, \varepsilon_n}\right] ds = R\left[\frac{1}{\pi i\, \varepsilon_n}\int\limits_L \nu(t)\, t^n \varphi^{(n+1)}(t)\, dt\right]$$

$$= R\left[\frac{1}{\pi i\, \varepsilon_n}\int\limits_L f(t)\, \varphi^{(n+1)}(t)\, dt\right] + R\left[\frac{1}{\pi i\, \varepsilon_n}\int\limits_L ic(t)\, t^n\, \varphi^{(n+1)}(t)\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi\, \varepsilon_n} R\left[\sum_{j=1}^{m} c_j \int\limits_{L_j} t^n \varphi^{(n+1)}(t) dt\right] = \frac{1}{\pi \varepsilon_n} R\left[\sum_{j=1}^{m} c_j n! \int\limits_{L_j} \varphi'(t)\, dt\right] = 0.$$

Это значит, что уравнение (8) всегда разрешимо. Решение этого уравнения имеет вид:

$$\mu(t) = \mu_0(t) + \sum_{k=1}^{2n+1} c_k \mu_k(t), \tag{16}$$

где $\mu_0(t)$—какое-нибудь частное решение уравнения (8), а c_k—произвольные постоянные. Нетрудно доказать, что $\mu(t)$ будет удовлетворять условию Hölder'a.

Подставляя выражение (16) вместо $\mu(t)$ в (1), будем иметь

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \sum_{k=1}^{2n+1} c_k \varphi_k(z), \tag{17}$$

где $\varphi_0(z)$ и $\varphi_k(z)$—функции, соответствующие соответственно $\mu_0(t)$ и $\mu_k(t)$, $k=1, 2, \ldots, 2n+1$.

В силу доказанной нами выше единственности представления (1), нетрудно заключить, что $\varphi_k(z)$, $k=1, 2, \ldots, 2n+1$, —линейно-независимые полиномы n-ой степени от z. В самом деле, в силу (8), имеем

$$J\{t^n \varphi_k^{(n+1)}(t)\, t'(s)\} = 0, \quad k=1, 2, \ldots, 2n+1,$$

что равносильно условию

$$J\{\int t^n \varphi_k^{(n+1)}(t)\,dt\} = \text{const}.$$

Но $\int t^n \varphi_k^{(n+1)}(t)\,dt$ представляет в области T голоморфную функцию, поэтому имеем:

$$\int z^n \varphi_k^{(n+1)}(z)\,dz = \text{const}, \quad z \varepsilon T.$$

Следовательно, $z^n \varphi_k^{(n+1)}(z) \equiv 0$, т. е. $\varphi_k^{(n+1)}(z) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

В силу линейной независимости функций $\varphi_k(z)$, из (17) однозначно определяются постоянные c_k. Подставляя значения этих постоянных в (16), получим искомое выражение для $\mu(t)$, которое и соответствует заданной голоморфной функции $\varphi(z)$. Таким образом, наша теорема доказана полностью.

2. Рассмотрим теперь следующую краевую задачу: *Требуется найти в области T голоморфную функцию $\varphi(z)$, непрерывную вместе со своими производными до $n+1$-го порядка в $T+L$ и удовлетворяющую на L условию*

$$R[A_{n+1}(t)\,\varphi^{(n+1)}(t) + A_n(t)\,\varphi^{(n)}(t) + \cdots + A_0(t)\,\varphi(t)] = f(t), \tag{18}$$

где $A_1(t), \ldots, A_{n+1}(t)$, $A_{n+1}(t) \neq 0$ — заданные непрерывные, вообще говоря, комплексные функции точки t на L, $A_0(t)$ и $f(t)$ — заданные действительные непрерывные функции. Кроме того, будем предполагать, что функции $A_k(t)$ и $f(t)$ удовлетворяют условию Hölder'a. Таким же образом будем требовать, чтобы искомая функция $\varphi(z)$, вместе со своими производными до $n+1$-го порядка, удовлетворяла условию Hölder'a на L.

Эта задача рассматривалась различными авторами, в частности Haseman'ом [2, 3] и Гаховым [4]. Эти авторы, следуя идее Hilbert'a, при помощи функции Green'a сводят задачу к интегральному уравнению с сингулярным ядром. Эти интегральные уравнения помимо сингулярности обладают еще тем недостатком, что их ядро содержит функцию Green'a, которая, вообще говоря, неизвестна. Это обстоятельство сильно затрудняет исследование названных интегральных уравнений.

Используя же формулу (1), задачу (16) чрезвычайно просто приводим сперва к сингулярному, а затем, путем регуляризации, к регулярному линейному интегральному уравнению второго рода, вполне эквивалентному исходной краевой задаче, причем ядро интегрального уравнения составляется при помощи функций $A_k(t)$ и будет представлять известную функцию.

Заметим сперва, что решение нашей задачи, если оно существует, будет определено лишь с точностью до аддитивной мнимой постоянной. Поэтому мы можем положить $J\{\varphi(0)\} = 0$.

Подставляя теперь вместо $\varphi(z)$ в (18) выражение (1), приходим к сингулярному интегральному уравнению, полностью эквивалентному нашей краевой задаче:

$$\alpha(t)\,\mu(t)+\int_L \frac{K(t,\zeta)}{t-\zeta}\,\mu(\zeta)\,d\zeta=f(t). \tag{19}$$

где

$$\alpha(t)=\varepsilon_n R\left[\pi i\,\frac{A_{n+1}(t)}{t^n t'(\sigma)}\right].$$

$$K(t,\zeta)=(\zeta-t)\,\overline{\zeta'}(s)R\left\{\frac{\varepsilon_n A_{n+1}(t)}{\zeta^n(\zeta-t)}+A_0(t)\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}A_k(t)\,\frac{d^k}{dt^k}\left[\left(1-\frac{t}{\zeta}\right)^n\lg\left(1-\frac{t}{\zeta}\right)\right]\right\}.$$

Введем обозначения

$$K(t,t)=\beta(t)=\varepsilon_n R\left[\frac{A_{n+1}(t)}{t^n t'(\sigma)}\right],\quad A(t,\zeta)=\frac{K(t,\zeta)-K(t,t)}{\zeta-t}.$$

Нетрудно видеть, что сингулярность $A(t,\zeta)$ будет вида $|t-\zeta|^{-\lambda}$, $0\leqq\lambda<1$.

Не уменьшая общности, можем считать, что $\alpha^2(t)+\pi^2\beta^2(t)=1$. Во всем дальнейшем, простоты ради, мы ограничимся рассмотрением односвязной области.

Пусть

$$ind\left[\frac{\alpha(t)+i\pi\beta(t)}{\alpha(t)-i\pi\beta(t)}\right]=\frac{1}{2\pi i}\left\{\arg\left[\frac{\alpha(t)+\pi i\beta(t)}{\alpha(t)-\pi i\beta(t)}\right]\right\}_L=-m.$$

Тогда, как известно [5], если $m\geqq 0$, уравнение (19) эквивалентно уравнению Фредгольма:

$$\mu(t)+\int_L K^*(t,\zeta)\,\mu(\zeta)\,d\zeta=f^*(t)+f_0(t)\,P_{m-1}(t), \tag{20}$$

где

$$K^*(t,\zeta)=\alpha(t)\,A(t,\zeta)-\beta(t)\,t^{\frac{m}{2}}e^{\chi(t)}\int_L\frac{\tau^{-\frac{m}{2}}e^{-\chi(\tau)}}{\tau-t}\,A(\tau,\zeta)\,d\tau,$$

$$f^*(t)=\alpha(t)f(t)-\beta(t)\,t^{\frac{m}{2}}e^{\chi(t)}\int_L\frac{\tau^{-\frac{m}{2}}e^{-\chi(\tau)}}{\tau-t}\,f(\tau)\,d\tau,$$

$$f_0(t)=\beta(t)\,t^{-\frac{m}{2}}e^{\chi(t)},\quad \chi(t)=-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\lg\left[\frac{\alpha(\tau)+i\pi\beta(\tau)}{\alpha(\tau)-i\pi\beta(\tau)}\tau^m\right]}{\tau-t}\,d\tau,$$

$$P_{-1}(t)\equiv 0,\quad P_{m-1}(t)=\sum_{k=0}^{m-1}a_k t^k,\quad m\geqq 1,$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$—произвольные комплексные постоянные. Таким образом, в рассматриваемом случае ($m \geqq 0$) интегральное уравнение (20) является полностью эквивалентным нашей краевой задаче. В частности, если заметим, что $f^*(t) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $f(t) \equiv 0$, получим, что однородной краевой задаче при $m > 0$ соответствует неоднородное интегральное уравнение (20) со свободным членом $f_0(t) P_{m-1}(t)$. При $m = 0$ однородной краевой задаче будет отвечать однородное интегральное уравнение.

Если $m < 0$, то уравнение (19) будет эквивалентным уравнению (20) со свободным членом $f^*(t)$ только при том условии, что решение этого последнего уравнения будет удовлетворять условиям

$$\int_L \frac{t^{-\frac{m}{2}} e^{-\chi(t)}}{t^k} f(t)\,dt = \int_L \mu(\zeta)\,d\zeta \int_L \frac{t^{-\frac{m}{2}} e^{-\chi(t)}}{t^k} A(t, \zeta)\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots, (-m).$$

Если эти условия не выполнятся, то тогда уравнение (19) не имеет решения и, следовательно, не будет решения также и у краевой задачи (18).

Академия Наук Грузинской ССР
Тбилисский Математический Институт

(Поступило в редакцию 5.6.1940)

მათემატიკა

ილია ვეკუა

ანალიზურ ფუნქციათა ერთი ახალი ინტეგრალური წარმოდგენა და მისი გამოყენება

რეზუმე

შრომაში მიღებულია მრავალბმულ სასრულ არეში ანალიზურ ფუნქციათა გარკვეული კლასის ერთი ახალი ინტეგრალური წარმოდგენა, რომლის საშუალებითაც მრავალი წრფივი სასაზღვრო ამოცანა, დაკავშირებული ანალიზურ ფუნქციებთან, ადვილად მიიყვანება ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებამდე.

საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემია
თბილისის მათემატიკური ინსტიტუტი

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА—ციტირებული ლიტერატურა

1. Н. И. **Мусхелишвили**. О решении задачи Дирихле на плоскости. Сообщ. Грузинского Фил. АН СССР, т. I, № 2, 1940, стр. 99—106.
2. **Haseman**. Integralgleichungen und Funktionentheorie. Math. Ann., Bd. 66, 1907.
3. **Haseman**. Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf einige Randwertaufgaben. Inaugural—Dissertation. Göttingen, 1907.
4. Ф. Д. **Гахов**. Линейные краевые задачи теории функций комплексного переменного. Изв. Физ.-Мат. Общ. и Инст. Мат. и Мех. при Казанском Университете, т. X, сер. 3, 1938, стр. 39—79.
5. И. Н. **Векуа**. О сингулярных линейных интегральных уравнениях, содержащих интегралы в смысле главного значения по Коши. Доклады АН СССР, т. XXVI, № 1, 1940.