# ИЛЬЯ НЕСТОРОВИЧ ВЕКУА

(Краткий обзор научной и общественной деятельности)

Илья Несторович Векуа принадлежит к числу ученых, внесших значительный вклад в сокровищницу мировой науки. Он оставил неизгладимый след не только как выдающийся ученый, но и как крупный организатор науки и высшего образования.

И. Н. Векуа родился 23 апреля 1907 года в селе ШешелетиГальского района. 1925 г.,после успешного завершения Учебы в средней школе г. Зугдиди, он зачислен на физико-математический факультет Тбилисского государственного университета, который окончил в 1930 г. В том же году он продолжил учебу в г. Ленинграде, в аспирантуре Академии наук СССР. В годы аспирантуры (1930–33 гг.) И. Векуа специализировался под руководством А. Н. Крылова, Н. И. Мусхелишвили и В. И. Смирнова по уравнениям математической физики. Применяя методы теории функций комплексного переменного, он изучил ряд задач статической и динамической теории упругости. Тогда он создал важные труды, посвященные теории распространения упругих волн в бесконечном слое с параллельными плоскими границами. Эти работы были положены в основу его кандидатской диссертации, которую он защитил позже (1937 г.).

С осени 1933 г. И. Н. Векуа работает на должности научного сотрудника физико-математического факультета Тбилисского государственного университета. В этот период он с самого начала привлек к себе внимание как один из самых активных участников постоянно действующего под руководством Н. И. Мусхелишвили научно-исследовательского семинара по проблемам математики и механики.

Среди научных направлений теоретической и прикладной математики И. Н. Векуа особенно привлекала теория дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа и различные приложения этой теории. Интенсивные исследования, проводимые в этом направлении и начатые им в 1936 г.,были завершены в сороковых годах созданием стройной теории линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа с аналитическими коэффициентами в частных производных в случае двух независимых переменных. Общие комплексные представления решений таких уравнений, построенные И. Н. Векуа, оказались удобными для установления новых структурных и качественных особенностей этих решений, а также для изучения широкого класса уравнений и граничных задач, недоступных исследованию ранее известными методами.

Значительная часть работ И. Н. Векуа этого направления собрана в его монографии «Новые методы решения эллиптических уравнений», которая в 1950 г. была удостоена Государственной премии СССР.

В 1939 г. И. Н. Векуа защищает докторскую диссертацию, а в 1940 г. его утверждают в звании профессора. В 1944 г. его избирают членом-корреспондентом АН Грузинской ССР, а в 1946 г. – действительным членом.

В 1940–1944 гг. И. Н. Векуа был деканом физико-математического факультета Тбилисского государственного университета, в 1944–1947 гг. – проректором по учебной работе, а в 1947–1951 гг. – академиком-секретарем АН Грузинской ССР.

Осенью 1951 г. И. Н. Векуа переезжает в Москву и начинает работать в Центральном гидроаэродинамическом институте заведующим лабораторией и, параллельно, в Московском физико-техническом институте заведующим кафедрой теоретической механики. В конце 1952 г. его избирают профессором кафедры дифференциальных уравнений Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, а в 1954 г. назначают заместителем директора Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР.

В Москве И. Н. Векуа был выполнен и опубликован большой цикл работ по теории обобщенных аналитических функций. Попытка построения теории таких функций была предпринята еще в девятнадцатом веке итальянским математиком Бельтрами. В начале тридцатых годов Карлеман и Теодореску показали, что целый ряд свойств аналитических функций одной комплексной переменной переносится на решение системы двух дифференциальных уравнений эллиптического типа первого порядка в случае двух действительных независимых переменных. И. Н. Векуа создал общую теорию систем, представляющих собой в настоящее время основную составную часть теории обобщенных аналитических функций. Применением установленных им теорем, он получил аналитическое обоснование построенной М. А. Лаврентьевым геометрической теории квазиконформных отображений плоских областей, что признано одним из лучших достижений в теории функций за последние пятьдесят лет. Установленные И. Н. Векуа результаты по теории эллиптических системпервого порядка вошли в его монографию «Обобщенные аналитические функции», которой в 1963 г. Была присуждена Ленинская премия.

Во время своего пребывания в Москве И. Н. Векуа принимал непосредственное участие в разработке проекта создания Сибирского отделения Академии наук СССР. Он являлся одним из активных членов созданной М. А. Лаврентьевым инициативной группы, ставшей во главе осуществления решения партии и правительства по организации на востоке нашей страны большого научного центра.

В 1957 г. было создано Сибирское отделение Академии наук СССР. В марте 1958 г. под председательством М. А. Лаврентьева был избран президиум СО АН СССР. Среди избранных членов этого органа находился и И. Н. Векуа. В том же году И. Н. Векуа был избран действительным членом АН СССР.

В 1959 г. недалеко от Новосибирска в Академгородке открылся Новосибирский государственный университет, первым ректором которого (до 1965 г.) был И. Н. Векуа. По совместительству он руководил теоретическим отделом Института гидродинамики СО АН СССР.

Весной 1965 г. по просьбе руководящих органов Грузинской ССР И. Н. Векуа возвратился в родную Грузию. С 1965 г. по 1972 г. он был ректором Тбилисского государственного университета, а с 1972 г. и до конца своей жизни – президентом Академии наук Грузинской ССР.

И. Н. Векуа был человеком, обладающим высокими гражданскими и душевными качествами. Часто вызывали удивление и восхищение его стойкость, мужество и сдержанность в сложных ситуациях. Пораженный тяжелым неизлечимым недугом ученый упорно продолжал научно-исследовательскую работу по созданию нового варианта математической теории упругих оболочек, которая вошла в опубликованную после его смерти монографию «Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек» (М., 1982 г.). Эта монография в 1984 г. была удостоена Государственной премии СССР. Ее английский перевод был издан в 1985 г. издательством “Питмана”.

Научные заслуги И. Н. Векуа снискали международное признание. Он был иностранным членом: Академии наук ГДР (г. Берлин), Академии естествознания “Леопольдина” (г. Галле), Академии наук, литературы и искусства в Палермо (Академия наук Сицилии), Польского общества теоретической и прикладной механики, Датского центра прикладной математики и механики и других научных обществ. Был избран членом Генеральной ассамблеи международного союза по теоретической и прикладной механике. Ему были присуждены звания почетного доктора университета в Галле и почетного сенатора университета в Иене.

Партия и правительство высоко оценили заслуги И. Н. Векуа. Среди множества правительственных наград, которых был удостоен ученый, есть Золотая Звезда Героя социалистического труда и пять орденов Ленина.

И. Н. Векуа скончался 2 декабря 1977 года. Благодарный грузинский народ похоронил его в обители выдающихся сынов земли Грузинской – на горе “Мтацминда”.

Теперь вкратце остановимся лишь на характерных моментах богатого наследия И. Н. Векуа, оказавших большое влияние на развитие соответствующих проблем математики.

В современной теории, так называемых нефредгольмовых задач для эллиптических уравнений, ключевое положение занимает всесторонне изученная И. Н. Векуа общая линейная краевая задача для аналитических функций одного комплексного аргумента.

С именем Римана и Гильберта связана одна из основных задач теории функций: найти аналитическую в области $D$ функцию $\Phi$, удовлетворяющую следующему граничному условию:

$$Re[\lambda(t)\Phi + (t)] = g(t), t \in \partial D, \tag{1}$$

где $\lambda$ и $g$–заданные функции на границе $\delta D$ области $D$, а $\Phi^{+}(t)$ – граничное значение искомой функции при $z \to t$из области $D$.

Если введем обозначения

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + i\lambda_2(t), \Phi(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

то задача (1) может быть сведена к задаче с косой производной, т. е. к задаче Пуанкаре: определить в области $D$ гармоническую функцию $u\ (x, y)$, удовлетворяющую следующему граничному условию:

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial y} = g(t), t = x + iy \in \partial D. \tag{2}$$

В связи с исследованием задач (1) и (2), рассмотрено следующее одномерное сингулярное интегральное уравнение

$$A\varphi(t) = \alpha(t)\varphi(t) + \beta(t)S\varphi(t) + T\varphi(t) = f(t), t \in \partial D, \quad (3)$$

Где $S$ – сингулярный оператор Коши

$$S\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\partial D} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}, t \in \partial D,$$

а $T$ – интегральный оператор Фредгольма.

Одним из основных вопросов теории уравнений типа (3) является его сведение к эквивалентному уравнению Фредгольма второго рода (задача эквивалентной регуляризации). Решение этого вопроса считается блестящим результатом И. Н. Векуа в теории сингулярных интегральных уравнений. Путем развития одной идеи Т. Карлемана в 40-х гг. И. Н. Векуа в классических предположениях разработал путь построения теории интегральных уравнений (3), который в настоящее время называется методом Карлемана-Векуа. Этот метод состоит из трех этапов: 1) эффективно строятся решения характеристического сингулярного интегрального уравнения (т. е. уравнения (3) при Т = 0) и союзного с ним уравнения; 2) посредством этих решений осуществляется эквивалентная регуляризация уравнения (3) и союзного с ним уравнения; 3) применением построенных таким образом интегральных уравнений Фредгольма доказываются теоремы Нетера для уравнения (3).

Для решения задачи регуляризации, помимо вышеприведенного метода, существует еще метод регуляризации путем перемножения операторов. Идея этого метода заключается в следующем: требуется построить оператор$B$ типа $A$ (см. (3) так, чтобы уравнение $BA\varphi = Bf$ оказалось фредгольмовым. В этом случае$B$ называется левым регуляризатором оператора $A$. Если уравнения $A\varphi = f$ и $BA\varphi = Bf$ эквивалентны, какова бы ни была $f$ из рассмотренного класса функций, то оператор $B$ называется левым эквивалентным регуляризатором оператора $A$. Было известно, что такой оператор не всегда существует. В этой связи возник вопрос: нельзя ли задачу построения уравнения Фредгольма, эквивалентного уравнению (3), поставить в такой редакции, чтобы она всегда имела решение? И. Н. Векуа дал на этот вопрос положительный ответ. Он доказал, что существует оператор$B$, построенный эффективно в квадратурах, причём или уравнения $A\varphi = f$ и $BA\varphi = Bf$эквивалентны, или эквивалентны уравнения $A\varphi = f$ и $AB\phi = f$ в том смысле, что если одно из них разрешимо, то разрешимо и второе, и между их решениями существует связь $\varphi = B\phi$.

Применением построенной теории уравнения (3) И. Н. Векуа сумел исчерпывающе решить задачу (1) в следующей общей постановке: в области $D$, граница $\delta D$которой – достаточно гладкая, простая, замкнутая кривая, требуется найти аналитическую функцию Ф, удовлетворяющую следующему граничному условию:

$$Re\sum_{k=0}^{m}\{\lambda_k(t)[\Phi^{(k)}(t)] + T_k[(\Phi^{(k)}) +]\} = f(t),\ t \in \partial D, \quad (4)$$

где $(\Phi^{(\kappa)})^{+}$ – граничное значение производной $\kappa$-го порядка функции $\Phi(z)$ из области $D;$ $\lambda_{\kappa}$и$f$– заданные функции на границе $\delta D,$ а$T_{\kappa}$– интегральный оператор Фредгольма. При исследовании краевой задачи (4) важную роль сыграло специальное интегральное представление аналитических функций, предложенное впервые И. Н. Векуа и носящее его имя.

Результаты И. Н. Векуа, установленные в связи с задачей (4), стали основой других его исследований, посвященных построению теории нормально разрешимых граничных задач в случае следующего дифференциального уравнения эллиптического типа второго порядка

$$\Delta u + a_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + a_3(x,y)u = 0, \tag{5}$$

где $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ – аналитические функции. Эти задачи представляют собой существенное обобщение граничной задачи Пуанкаре (2) в случае уравнения (5). Действительно, граничное условие имеет следующий вид:

$$\sum_{j+k\le m} a_{jk}(t)\left[\frac{\partial^{j+k}u}{\partial x^j \partial y^k} + T_{jk}\left(\frac{\partial^{j+k}u}{\partial x^j \partial y^k}\right)\right] = f(t), t \in \partial D, \tag{6}$$

где $\alpha_{j\kappa}$, $f$– известные действительные функции, определенные на $\delta D$; $T_{j\kappa}$ – интегральные операторы Фредгольма.

При построении теории этой задачи И. Н. Векуа существенно применил следующее интегральное представление всех регулярных решений уравнения (5):

$$u(x,y) = Re\left[\alpha(z,\bar{z})\varphi(z) + \int_0^z \beta(z,\bar{z},t)\varphi(t)dt\right], \tag{7}$$

где $\varphi(z)$ – произвольная аналитическая функция, а $\alpha$, $\beta$– функции, построенные с помощью коэффициентов $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$.

Формулы сходные с (7) были получены Т. Карлеманом, Г. Леви и С. Бергманом. Метод построения формулы (7), носящий название метода Римана-Векуа, считается наипростейшим, ясным и конструктивным.

И. Н. Векуа обобщил формулу (7) для следующего эллиптического уравнения

$$\Delta^n u + \sum_{k=1}^{n} L_k\left(\Delta^{n-k}u\right) = 0, \tag{8}$$

где $L_{\kappa}$ – линейный дифференциальный оператор к-го порядка с аналитическими коэффициентами. При помощи полученных формул И. Н. Векуа удалось исследовать с достаточной полнотой первую краевую задачу нахождения регулярных и односвязной области решений этого уравнения, удовлетворяющих условиям

$$\left.\frac{d^j u}{dv^j}\right|_{\partial D} = f_j, j = 0,1, \dots, n-1,$$

где ν – внешняя нормаль $\delta D$.

В теории общих комплексных представлений решений эллиптических уравнений примечательным является открытый И. Н. Векуа факт о возможности эквивалентной редукции любой краевой задачи для уравнения (8) к соответствующей краевой задаче для систем аналитических функций.

Хорошо известно, что теория аналитических функций Φ ($z$) = u (x, y) + iυ(x, y) одного комплексного переменного z = x + iy представляет собой теорию системы Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Эта система является частным случаем эллиптической системы

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + au + bv = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + cu = dv = 0, \qquad (9)$$

с действительными коэффициентами a, b, c, d, являющимися функциями действительных переменных *x,y*. В обозначениях

$$W(z) = u + iv, 2\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}, 4A = a + d + i(c - b), 4B = a - d + i(c + b),$$

система (9) записывается в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} + AW + B\overline{W} = 0 \qquad (10)$$

Еще в прошлом столетии Бельтрами и Пикар попытались построить теорию обобщенных аналитических функций W(z) = u + iυ.

Значительные результаты в этом направлении получили Карлеман и М. Лаврентьев. В обширном цикле исследований И. Н. Векуа установлены основополагающие результаты, составляющие основную составную часть современной теории функций, удовлетворяющих следующему уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} - q_1\frac{\partial F}{\partial z} - q_2\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} + AF + B\bar{F} = 0 \qquad (11)$$

Если $|q_1| + |q_2| < 1$, то уравнение (11) представляет собой записанную в комплексной форме линейную эллиптическую систему двух уравнений относительно действительной и мнимой частей функции *F.* В построенной теории от известных функций $q_1$, $q_2$, $A$, $B$ требуются достаточно общие условия гладкости.

И. Н. Векуа внес значительный вклад в теорию метагармонических функций, представляющих собой решения уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2}+\lambda^2 u=0, \lambda=const, p\geq 2 \qquad (12)$$

Он дал следующее интегральное представление метагармонических функций

$$u(x_1,x_2,\dots,x_p)=u_0(x_1,\dots,x_p)-$$

$$-\int_0^1 u_0(x_1t,\dots,x_pt)t^q\frac{\partial}{\partial t}I_0\left(\lambda r\sqrt{1-t}\right)dt,$$

где $u_0$ – произвольная гармоническая функция, $q=\frac{p-2}{2}, r^2=x_1^2+\cdots+x_p^2$, $I_0$ – функция Бесселя, он же построил обратное интегральное представление этой формулы и, кроме того, в случае действительного λ показал, что из условий Зоммерфельда

$$\frac{\partial u}{\partial r}-i\lambda u=0\left(r^{-q-1/2}\right), u=O\left(r^{-q-1/2}\right)$$

обеспечивающих единственность решения внешней задачи Дирихле в случае уравнения (12), второе условие является следствием первого.

И. Н. Векуа показал, что разработанный им метод построения решений линейных уравнений эллиптического типа может быть применен для изучения свойств решений некоторых нелинейных эллиптических уравнений. Так, например, он изучил свойства решений уравнения Гаусса

$$\Delta\log\upsilon(x,y)=-2K(x,y)\upsilon(x,y),$$

что дало ему возможность найти простое доказательство известной теоремы Д. Гильберта о несуществовании регулярной поверхности с отрицательной кривизной, конформно гомеоморфной ко всей плоскости.

Широк диапазон теоретических результатов, достигнутых И. Н. Векуа. Опираясь на методы И. Н. Векуа исследования эллиптических уравнений, была создана стройная теория упругих оболочек. В частности, он сам предложил два варианта этой теории, один из которых применяется для изучения тонких пологих оболочек, а второй – для построения безмоментной теории оболочек.

В безмоментной теории оболочек знакопеременной гауссовой кривизной главную роль играют уравнения смешанного типа. В некоторых важных случаях эти уравнения сводятся к известным модельным уравнениям смешанного типа, в частности к уравнению Хольмгрена-Геллерстедта

$$y^{2m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

($m \geq 0$ –целое число) и уравнению Лаврентьева-Бицадзе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\operatorname{sign} y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

для которых задача Трикоми и различные ее обобщения приобретают вполне определенный механический и геометрический смысл. Этот факт, обнаруженный И. Н. Векуа в середине пятидесятых годов, вызвал огромный интерес математиков и механиков, поскольку прикладная важность уравнений смешанного типа раньше наблюдалась лишь в задачах аэродинамики.

Глубина и важность исследований И. Н. Векуа, открытые им новые научные направления поставили его в ряды крупнейших ученых нашего времени.

А. В. Б и ц а д з е,   Б. В. Х в е д е л и д з е