მიხეილ ნოდიას გეოფიზიკის ინსტიტუტის შრომები, ტ. LXII, 2010
Transactions of Mikheil Nodia Institute of Geophysics, vol. LXII, 2010
Труды Института геофизики им. М. Нодиа, т. LXII, 2010

О СОСТОЯТЕЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ СТАТИСТИЧКСКИХ СТРУКТУР ФИШЕРА

Алексидзе Л. Т., Зеракидзе З.С.

Горийский университет

Пусть в основном базисном пространстве E выделена σ-алгебра S его частей, на которых задано семейство вероятностных мер.

Напомним некоторые определения $[1-3]$.

Определение 1. Под статистической структурой будем понимать следующий объект $\{E,S,\mu_i,i\in I\}$, где $\{\mu_i,i\in I\}$ семейство вероятностных мер, заданных на S.

Определение 2. Статистическая структура $\{E,S,\mu_i,i\in I\}$ называется ортогональной, если вероятностные меры $\{\mu_i,i\in I\}$ попарно ортогональны.

Определение 3. Статистическая структура $\{E,S,\mu_i,i\in I\}$ называется слабо разделимой, если существует такое семейство $(X_i)_{i\in I}$ измеримых частей от E, что выполняются соотношения

$$(\forall_i)(\forall_j)(i\in I, j\in I \Rightarrow \mu_i(x_j)) = \begin{cases} 1, & \text{если } i=j \\ 0, & \text{если } i\neq j \end{cases}$$

Определение 4. Статистическая структура $\{E,S,\mu_i,i\in I\}$ называется сильно разделимой, если существует такое дизъюнктное семейство $(X_i)_{i\in I}$ измеримых частей от E, что выполняются соотношения

$$\mu_i(X_i)=1, \quad \forall i\in I.$$

Определение 5. Статистическая структура $\{E,S,\mu_i,i\in I\}$ называется "Статистическая структура Фишера", если μ_i есть вероятность Фишера $\forall i\in I$.

Пусть $E=[0,\infty)$, S –есть борелевская σ-алгебра частей $[0,\infty)$, а вероятностная мера на S задаётся по формуле

$$P(A)=\int_A \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(x+1)^{\frac{m+n}{2}}}dx, \quad \forall A\in S,$$

где $\Gamma(c)=\int_0^\infty x^{c-1}e^{-x}dx$, m и n целые положительные числа.

Полагаем, что параметреческое множество I наделено σ-алгеброй B, содержащей все конечные подмножества I.

Определение 6. Скажем, что статистическая структура Фишера $\{E,S,\mu_i,i \in I\}$ допускает состоятельную оценку параметров, если существует хотя бы одно такое измеримое отображение f пространства (E,S) на (I,B), что выполняются следующие соотношения:

$$\mu_i\{x : f(x) = i\} = 1, \quad \forall i \in I.$$

Определение 7. Будем говорить, что статистическая структура Фишера $\{E,S,\mu_i,i \in I\}$ допускает состоятельную оценку всякой параметрической функции, если для всякой действительной ограниченной измеримой функции $g(i)$ на (I,B) существует хотя бы одна такая действительная ограниченная измеримая функция $f(x)$ на (E,S), что выполняются равенства

$$\mu_i\{x : f(x) = g(i)\} = 1, \quad \forall i \in I.$$

Определение 8. Будем говорить, что статистическая структура Фишера $\{E,S,\mu_i,i \in I\}$ допускает несмещённую оценку всякой параметрической функции, если для всякой действительной ограниченной измеримой функции $g(i)$ на (I,B) существует хотя бы одна такая действительная ограниченная измеримая функция $f(x)$ на (E,S), что выполняются равенства

$$\int_E f(x)\mu_i(dx) = g(i), \quad \forall i \in I.$$

Теорема 1. Если статистическая структура Фишера $\{E,S,\mu_i,i \in I\}$ допускает состоятельную оценку параметров, то эта статистическая структура Фишера сильно разделимая.

Доказательство. Так как статистическая структура Фишера $\{E,S,\mu_i,i \in I\}$ допускает состоятельную оценку параметров то существует хотя бы одно такое измеримое отображение f пространства (E,S) на (I,B), что

$$\mu_i\{x : f(x) = i\} = 1, \quad \forall i \in I.$$

Обозначим через

$$A_i = \{x : f(x) = i\}, \quad \forall i \in I.$$

Ясно, что A_i S-измеримые,

$$A_i \cap A_j = \varnothing \text{ при любых } i \neq j \text{ и } \mu_i(A_i) = 1, \quad \forall i \in I.$$

Таким образом существуют такие S-измеримые попарно-непересекающиеся A_i множества, что $\mu_i(A_i) = 1$, $\forall i \in I$. Это и означает, что статистическая структура Фишера $\{E,S,\mu_i,i \in I\}$ сильно разделимая. Этим теорема доказана.

Теорема 2. Если статистическая структура Фишера $\{E,S,\mu_i,i \in I\}$ допускает состоятельную оценку параметров, то эта структура допускает состоятельную оценку любой параметрической функции и несмещённую оценку любой параметрической функции.

Доказательство. Если статистическая структура Фишера $\{E,S,\mu_i,i \in I\}$ допускает состоятельную оценку параметров, то существует хотя бы одно такое измеримое отображение η пространства (E,S) на (I,B), что

$$\mu_i\{x : \eta(x) = i\} = 1, \quad \forall i \in I.$$

Полагая $f_g = go\eta$, где $g(i)$любая действительная, измеримая, ортогональная функция на (I,B), то

$$[x : f_g(x) = g(i)] = [x : \eta^{-1}(g^{-1}(g(i)))] = [x : \eta^{-1}(i)] \text{ и}$$

$$\mu_i\{x : f_g(x) = g(i)\} = 1, \quad \forall i \in I.$$

т.е. f_g состоятельная оценка любой параметрической функции. Таким образом, из состоятельности оценок параметров получили состоятельную оценку любой параметрической функции. Теперь уже легче показать, что из состоятельности любой параметрической функции вытекает несмещённая оценка всякой параметрической функции. Этим теорема 2 доказана.

Замечание 1. Если статистическая структура Фишера $\{E, S, \mu_i, i \in I\}$ сильно разделима, то отсюда в общем не вытекает, что эта структура допускает состоятельной оценки параметров $[см(1)]$.

Теорема 3. Для того, чтобы статистическая структура Фишера $\{E, S, \mu_i, i \in N\}$, $N = \{1,2,\dots,n,\dots\}$ допускала состоятельную оценку параметров необходимо и достаточно, чтобы она была сильно разделимой.

Достаточность. Так как статистическая структура Фишера $\{E, S, \mu_i, i \in N\}$ сильно разделима, то существует такое дизъюнктное S-измеримое семейство A_i, что $\mu_i(A_i) = 1$, $\forall i \in I$. Определим на (E, S) f отображение по формуле $f(A_i) = i$, $\forall i \in I$. Ясно, что f отображение (E, S) в (I, B) и

$$\mu_i(x : f(x) = i) = \mu_i(A_i) = 1, \quad \forall i \in I.$$

Этим доказана достаточности. Необходимость вытекает из теоремы 1.

Теорема 4. Если статистическая структура Фишера $\{E, S, \mu_i, i \in N\}$, $N = \{1,2,\dots,n,\dots\}$ слабо разделима, то эта структура допускает состоятельную оценку параметров.

Доказательство. Так как $\{E, S, \mu_i, i \in N\}$ слабо разделимая, то существуют S-измеримые множества, такие, что

$$\mu_i(\widetilde{C}_j) = \begin{cases} 1, & при \ i = j \\ 0, & при \ i \neq j \end{cases}.$$

Рассмотрим следующие множества

$$C_i = \widetilde{C}_i - \widetilde{C}_i \cap \left(\bigcup_{k \neq i} \widetilde{C}_k \right), \quad i = 1,2,\dots,n,\dots$$

Во-первых $C_i \cap C_j = \varnothing$, $i \neq j$ и $\mu_i(Cj) = 1$, $\forall i \in N$.

Определим отображение $f: (E, S) \to (I, B)$ следующим образом $f(C_i) = i$, тогда ясно, что $\mu_i\{x : f(x_i) = i\} = \mu_i(C_i) = 1$, $\forall i \in I$. т.е. f состоятельная оценка параметров. Этим теорема 4 доказана.

Теорема 5. Если статистическая структура Фишера $\{E, S, \mu_i, i \in N\}$, $N = \{1,2,\dots,n,\dots\}$ ортогональная, то эта структура допускает состоятельной оценки параметров.

Доказательство. Так как статистическая структура ортогональная, то существуют S-измеримые множества $\widetilde{C}_{ik}$ такие, что $\mu_k(\widetilde{C}_{ik}) = 0$ и $\mu_i(E - \widetilde{C}_{ik}) = 0$ при любых $i \neq k$.

Возьмём такие множества $C_i = \bigcup_{k \neq i} (E - \widetilde{C}_{ik})$, $i = 1,2,\dots,n,\dots$ Тогда ясно, что $\mu_i(C_i) = 0$, $\forall i \in N$ и $\mu_k(E - C_i) = 0$, $k \neq i$.

Пусть $B_i = C_i - C_i \cap \left(\bigcup_{k \neq i} C_k \right)$, $\forall i \in N$.

Тогда ясно, что $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$ и $\mu_i(B_i) = 1$, $\forall i \in N$. Определим отображение f: $(E,S) \to (I,B)$ по формуле $f(B_i) = i$, тогда $\mu_i\{x : f(x_i) = i\} = \mu_i(B_i) = 1$, $\forall i \in N$.

Этим теорема 5 доказана.

Доказываются следующие теоремы.

Теорема 6. Для того, чтобы статистическая структура Фишера $\{E, S, \mu_i, i \in I\}$ допускала состоятельной оценки параметров необходимо и достаточно, чтобы она была сильно разделимой и регулярной.

Теорема 7. Для того, чтобы статистическая структура Фишера $\{E, S, \mu_i, i \in I\}$ допускала состоятельной оценки всякой параметрической функции необходимо и достаточно, чтобы она была слабо разделимой и регулярной.

Литература

1. L. Aleksidze. Z. Zerakidze. Optimal consistet estimates connected with stochastic system. Bull.Georgian Acad. Set. 169. Tb.2004. №1.
2. Z. Zerakidze. Hilbert space of measures. Ukrainion Journal of Mathematics 38. 1986. №2.
3. A. Kharazishvili. Nonmeasurable sets and functions. Elsevier. Amsterdam. 2004

ფიშერის სტატისტიკური სტრუქტურების პარამეტრების ძალდებულობის შესახებ

ლ.თ. ალექსიძე, ზ.ს. ზერაკიძე

რეზიუმე

ნაშრომში დამტკიცებულია აუცილებელი და საკმარისი პირობები, თუ როდის უშვებს ფიშერის სტატისტიკური სტრუქტურა პარამეტრების ძალდებულ შეფასებას.

О СОСТОЯТЕЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ СТАТИСТИЧКСКИХ СТРУКТУР ФИШЕРА

Л. Т. Алексидзе, З.С. Зеракидзе

Резюме

В статье доказаны необходимые и достаточные условия, когда статистическая структура Фишера допускает состоятельной оценки параметров.

ABOUT CONSISTENT ESTIMATORS FISHER STATISTICAL STRUCTURES

L. T. Aleksidze, Z.S. Zerakidze.

Abstract

In the present paper we prove the necessary and sufficient conditions for the existence of consistent estimates fisher statistical structures.